



УДК 532.546

А. Я. Шпилевой, И. К. Волянская, В. С. Мартынов

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ РАБОТЫ СКВАЖИНЫ БЕЗ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВБЛИЗИ МОРСКОГО ПОБЕРЕЖЬЯ

На основе метода изображения особых точек получена гидродинамическая модель работы водяной скважины на морском побережье при наличии полукруглого включения. Для различных случаев исследуются условия работы скважины без загрязнения.

On the basis of a method of the image of special points the hydrodynamic model of work of a water chink at sea coast in the presence of semicircular inclusion is received. For various cases working conditions of a chink without pollution are investigated.

Ключевые слова: фильтрационные течения, комплексные потенциалы, точечный источник, поступательный поток, критические точки, загрязнение скважины, критический дебит скважины.

Key words: filtration currents, complex potentials, dot source, forward stream, critical points, chink pollution, the critical debit of a chink.

Введение

Для исследования фильтрационных течений жидкости, подчиняющихся закону Дарси, удобно использовать комплексный потенциал $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [1; 2]. По нему можно определить поле скоростей и поле давлений [1]. Если границами раздела областей фильтрации являются прямые или окружности, то для определения комплексных потенциалов традиционно используется метод изображения особых точек [1; 2]. Комплексные потенциалы успешно применяются для моделирования различных физических процессов в гидродинамике, электростатике, магнитостатике и др.

Исследование условий работы скважины без загрязнения вблизи морского побережья

Пусть поступательный поток грунтовых вод стекает в море со скоростью v_0 перпендикулярно берегу. Граница моря направлена вдоль оси ox (рис. 1). Скважина, ка-

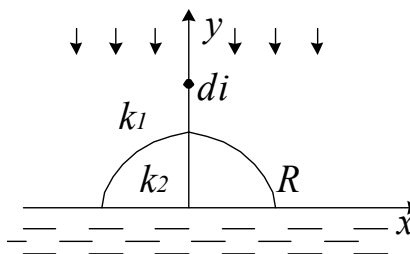


Рис. 1. Область фильтрации



чающая воду, моделируется точечным стоком и располагается в точке $z_0 = di$.

На берегу располагается полукруглое включение радиуса R ($R < d$) с коэффициентом проницаемости k_2 . Остальная область фильтрации ($|z| > R, \text{Im } z > 0$) имеет коэффициент проницаемости k_1 . Полагаем, что заданы скорость потока v_0 , величины d, R, k_1, k_2 .

Требуется получить уравнение для определения положений критических точек и соответствующих им дебитов скважины, для различных частных случаев значений k_1 и k_2 вычислить критический дебит и указать критерий работы скважины без загрязнения.

Работа одной или двух скважин, но без дополнительного включения рассмотрена в работах [3; 4].

Общее решение

Первоначально найдем комплексные потенциалы различных течений для заданной среды (рис. 1). С помощью теорем об окружности и прямой [1; 2] найдем комплексные потенциалы $W_1(z)$ и $W_2(z)$ для различных особых точек.

Пусть $f(z)$ имеет особую точку z_0 в области $|z| > R, \text{Im } z > 0$. Применяем теорему о прямой, а затем об окружности и, учитывая, что в нижней полуплоскости находится свободная жидкость (море), получаем

$$\begin{aligned} W_1(z) &= f(z) - \bar{f}(z) - \lambda \bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \lambda f\left(\frac{R^2}{z}\right), \\ W_2(z) &= (1 + \lambda) \left[f(z) - \bar{f}(z) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где $\lambda = (k_2 - k_1) / (k_2 + k_1)$.

Комплексные потенциалы течения для данной задачи

Скважина моделируется точечным стоком мощности Q , т. е. описывается аналитической функцией

$$f_1(z) = -(Q/2\pi) \ln(z - id). \quad (2)$$

В море перпендикулярно берегу стекает поступательный поток грунтовых вод со скоростью v_0 , который описывается функцией

$$f_2(z) = v_0 zi. \quad (3)$$

Записывая выражения (1) для функций (2, 3) получаем

$$\begin{aligned} W_1(z) &= -\frac{Q}{2\pi} [\ln(z - id) + \ln(z + id) + \lambda \ln(R^2 + izd) - \lambda \ln(R^2 - izd)] + v_0 zi + \lambda v_0 i \frac{R^2}{z}, \\ W_2(z) &= (1 + \lambda) \frac{Q}{2\pi} [\ln(z + id) - \ln(z - id)] + (1 + \lambda) v_0 zi. \end{aligned} \quad (4)$$

Комплексные потенциалы (4) дают возможность полностью исследовать фильтрационные течения в областях фильтрации при наличии скважины и поступательного потока.



С их помощью можно получить уравнение для нахождения критических точек течения и соответствующих им дебитов скважины. Известно, что $W'(z) = V_x - iV_y$, поэтому скорость и, следовательно, критические точки можно найти путем решения уравнения $W'_1(z)=0$, которое в данном случае принимает вид

$$-\left(Qd / \pi (z^2 + d^2)\right) + \left(\lambda QdR^2 / \pi (R^4 + z^2 d^2)\right) + v_0 - \lambda v_0 (R^2 / z^2) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) дает возможность по заданному дебиту Q найти координаты критических точек в области $z > R$, $Im z > 0$. И наоборот, для заданной критической точки z_k можно найти соответствующий дебит Q .

Пусть $W'_2(z) = 0$. Тогда будем иметь

$$i\left(-\left(Qd / \pi (z^2 + d^2)\right) + v_0\right) = 0. \quad (6)$$

В уравнении (6) полагаем $z = x$, так как критические точки в области с коэффициентом проницаемости k_2 могут быть только на оси Ox . Тот факт, что $V_x \equiv 0$, означает, что линии тока ортогональны границе загрязненной жидкости. Из уравнения (6) следует, что

$$x_k = \pm d \sqrt{(Q / \pi v_0 d) - 1}. \quad (7)$$

В случае одной критической точки $x_k = 0$ из выражения (7) следует

$$Q_0 = \pi v_0 d. \quad (8)$$

Заметим, что формулы (7) и (8) имеют место в отсутствие включения. Так как скважина находится в области с коэффициентом проницаемости k_1 , то согласно выражению (4) критический дебит для данного случая будет определяться формулой $Q'_0 = Q_0 / (1 + \lambda)$, из которой следует, что критический дебит Q'_0 будет возрастать, если $k_2 < k_1$.

Формулу для определения дебита Q , соответствующего критическим точкам в области $z > R$, $Im z > 0$, найдем из выражения (5):

$$Q = v_0 \pi (1 - \lambda R^2 / z^2) / d \left(1 / (z^2 + d^2) - \lambda R^2 / (R^4 + z^2 d^2)\right). \quad (9)$$

Для вычисления критических точек, лежащих на полуокружности, уравнение (5) путем замены $z = Re^{i\varphi}$ преобразуется к кубическому уравнению относительно $\cos \varphi$, которое имеет два решения:

$$а) \cos \varphi = 0, \quad \text{следовательно } \varphi = \pi / 2; \quad (10)$$

$$б) \cos^2 \varphi = M / 4(A + D). \quad (11)$$

Таким образом, при $\varphi = \pi/2$ будет одна критическая точка, а при $\varphi \neq \pi/2$ получаем две критические точки.

Частные случаи

Рассмотрим частный случай, когда из моря выступает полукруглый залив, примыкающий к берегу ($k_2 = \infty$, $\lambda = 1$).



Критические точки на дуге полуокружности определяются с помощью формул (10) и (11). Дебит скважины определяется с помощью формулы (9):

$$Q = \left(v_0 \pi (R^2 e^{2i\varphi} + d^2) (R^2 + d^2 e^{2i\varphi}) \right) / \left(d e^{2i\varphi} (R^2 + d^2) \right).$$

В частных случаях имеем:

а) при $\varphi = 0$, $Q_1 = (v_0 \pi / d) (R^2 + d^2)$;

б) при $\varphi = \pi / 2$, $Q_2 = (v_0 \pi (d^2 - R^2)) / (d (R^2 + d^2))$.

При $\varphi = \pi / 2$ имеем одну критическую точку, поэтому Q_2 будет критическим дебитом для данного случая. Линии тока для данного случая указаны на рисунке 2.

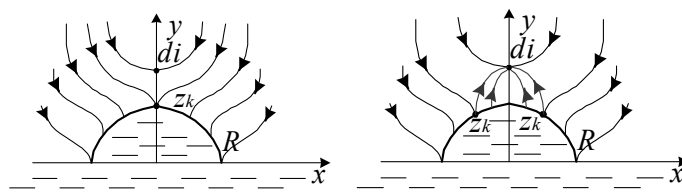


Рис. 2. Расположение критических точек

Рассмотрим частный случай, когда полукруг является непроницаемым ($k_2 = 0$, $\lambda = -1$). Критические точки на дуге полуокружности определяются с помощью формул (10) и (11), дебит скважины – с помощью формулы (9). Получаем

$$Q = \frac{v_0 \pi}{d} \cdot \frac{(R^2 e^{2i\varphi} + d^2) (R^2 + d^2 e^{2i\varphi})}{e^{2i\varphi} (R^2 + d^2)}.$$

Отметим частные случаи:

а) $\varphi = 0$; $Q_1 = (v_0 \pi / d) (R^2 + d^2)$;

б) $\varphi = \pi / 2$; $Q_2 = (v_0 \pi (d^2 - R^2)) / (d (R^2 + d^2))$.

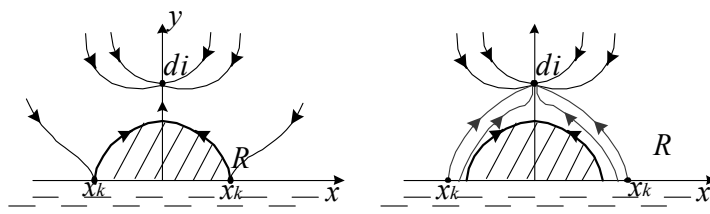


Рис. 3. Расположение критических точек



Картины линий тока при различных значениях Q указаны на рисунке 3.

Как видно из рисунков 3, критический дебит скважины возможен лишь при наличии двух критических точек ($x_k = \pm R$) и равен Q_1 , так как при $Q < Q_1$ загрязнения скважины не будет.

Чтобы оценить загрязнение скважины морскими водами, вводится понятие загрязнения скважины [1]. Загрязнением скважины S называется отношение количества морских вод, поступающих в скважину Q_1 , к количеству откачиваемой из скважины воды в единицу времени (т.е. к дебиту Q), $S = Q_1 / Q$, причем $Q_1 = (\psi_2 - \psi_1)$, где ψ_1, ψ_2 — значения функции тока в критических точках.

Заключение

Для анализа полученных результатов отметим, что критический дебит скважины в отсутствие полукруглой области определяется формулой (8). Сравнивая формулы для дебитов, заключаем, что наиболее выгодно располагать скважины за непроницаемыми или плохо проницаемыми участками. В этом случае загрязнение скважины уменьшается. В результате мощность скважины можно увеличивать.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при разработке и эксплуатации водозаборов, расположенных вблизи загрязненных водохранилищ или на морском побережье.

Список литературы

1. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. М., 1972.
2. Зайцев А. А., Шпилевой А. Я. Теория стационарных физических полей в кучно-однородных средах. Калининград, 2001.
3. Голубева О. В. Фильтрация к скважинам и критерий их работы без загрязнения: препринт №182 / Ин-т проблем механики АН СССР. М., 1981.
4. Шпилевой А. Я. Исследование загрязнений водяных скважин, расположенных вблизи загрязненного бассейна: матер. междунар. науч.-техн. конф. / КГТУ. Калининград, 2000.

Об авторах

Алексей Яковлевич Шпилевой — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

Ирина Константиновна Волянская — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: volyanskaya86@mail.ru.

Василий Сергеевич Мартынов — учащийся малого физ.-мат. факультета Балтийского федерального университета им. И. Канта и лицея №18.

Authors

Aleksej Shpilevoy — PhD, associate professor, I. Kant Baltic Federal University.

Irina Volyanskaya — PhD student, I. Kant Baltic Federal University.

Vasily Martinov — student of a small physical and mathematical faculty I. Kant Baltic Federal University and lycee №18.